

## **IMPLEMENTAZIONE DI UN MODELLO PER CONTATTO INTERMITTENTE NELLE COPPIE ROTOIDALI CON GIOCO**

A.TASORA, E.PRATI, M.SILVESTRI

*Università degli Studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Industriale  
Parco Area delle Scienze, 43100 Parma, Italy*  
tasora@ied.unipr.it, prati@ied.unipr.it, silve@ied.unipr.it

### **SOMMARIO**

Nel presente lavoro si sviluppa un modello di coppia cinematica in grado di riprodurre gli effetti del contatto discontinuo come conseguenza di un gioco nella coppia stessa. Si è riposta particolare cura nel conferire al metodo il carattere della massima generalità, in modo da consentirne l'impiego anche in caso di meccanismi con più giochi contemporanei, nonché nel caso di giochi fra superfici non perfettamente cilindriche (es. bronzine usurate).

### **ABSTRACT**

This paper develops a model for revolute pairs exploiting non-continuous contact, as a consequence of joint clearances. Specific care has been paid in sake of the highest generality, so that the current method can be used also in case of mechanisms with multiple clearances, as well as in case of clearances between non-cylindrical shapes.

### **1 INTRODUZIONE**

La presenza di giochi nelle coppie cinematiche di meccanismi articolati, in particolare nei quadrilateri e nei manovellismi di spinta, può essere causa di rapida usura, vibrazioni non desiderate, rumorosità e scarsa precisione nel controllo del moto (Figura 1).

Questa considerazione giustifica l'approfondimento della tematica in un ambito teorico e sperimentale al fine di sviluppare un modello numerico che sia applicabile alla simulazione di meccanismi generici, ovvero laddove sia richiesta una valutazione realistica dell'effetto dei giochi nelle coppie rotoïdali in termini di dinamica, cinematica ed usura dei materiali. Tale esigenza motiva l'adozione di un metodo che contempli, per ogni coppia con gioco, l'alternanza delle fasi di contatto continuo, distacco, ripresa del contatto con urto ed eventuale rimbalzo (Figura 2).

Al fine di rappresentare la fase di contatto fra le due superfici della coppia, dato che i metodi

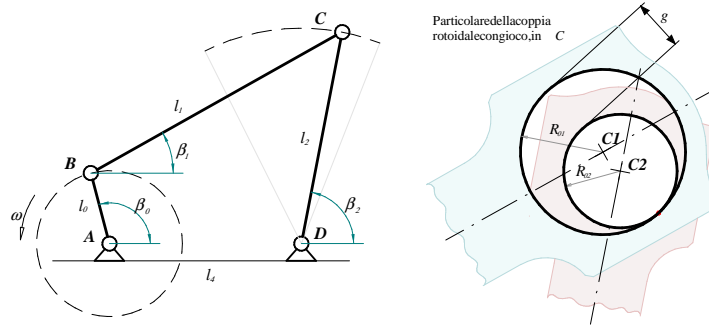


Figura 1: Quadrilatero articolato con gioco.

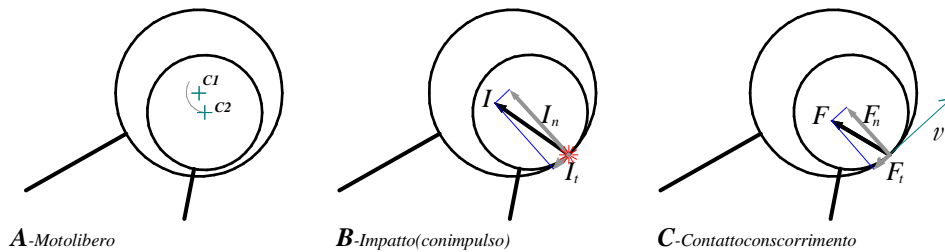


Figura 2: Diverse modalità di funzionamento del quadrilatero.

basati su campi di forza e contatto herziano [2] presentano difficoltà nell'integrazione numerica, i metodi finora proposti in letteratura utilizzano perlopiù un semplice modello che introduce una biella a massa nulla [1], come in figura 3. Tale procedimento, per quanto di facile implementazione, non si applica facilmente al caso di giochi multipli e di giochi fra superfici non cilindriche. Pertanto il metodo proposto nell'ambito del presente lavoro introduce un vincolo geometrico in grado di simulare il contatto fra superfici di curvatura arbitraria, racchiudendo anche il sotto-caso di contatto fra albero e foro circolari.

Inoltre, da un'analisi della letteratura esistente su questo argomento, si evince la necessità di perfezionare i modelli di urto impulsivo fino ad ora impiegati, per rappresentare la ripresa di contatto dopo una fase di distacco [3].

Particolare attenzione è quindi rivolta all'eventuale perdita di contatto fra gli elementi cinematici della coppia, con conseguente urto alla ripresa del contatto. Tale evento può aver luogo molte volte al secondo, suggerendo l'adozione di uno speciale modello di urto impulsivo che,

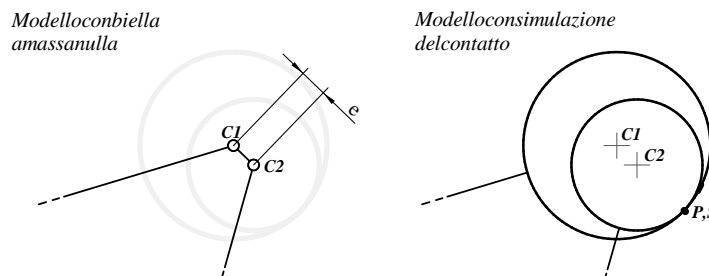


Figura 3: Fase di contatto con scorrimento: modello con biella a massa nulla e modello discusso nel presente lavoro.

a fronte di un onere computazionale relativamente modesto, possa rappresentare correttamente sia la componente ortogonale che la componente tangenziale dell'impulso in funzione di un numero limitato di coefficienti [4].

Nello sviluppo teorico si sono presi in esame alcuni accorgimenti in grado di rendere la simulazione sufficientemente agevole dal punto di vista dell'integrazione delle equazioni di moto, nonché per garantire l'applicabilità dei risultati al caso di giochi in più coppie.

Al fine di perfezionare e verificare il modello si è realizzato un banco prova sperimentale costituito da un quadrilatero articolato piano, del quale è possibile modificare dimensioni, entità del gioco e velocità angolare della manovella.

Dal confronto dei risultati teorici con i risultati sperimentali si potrà compiere un'analisi critica sul modello impiegato e sulla validità del suo utilizzo per prevedere l'usura e la deformazione degli elementi cinematici della coppia nelle condizioni reali di esercizio.

## 2 SOLUZIONE DEL PROBLEMA DINAMICO

Assegnato un generico sistema multicorpo, sono note due principali strategie per la soluzione del problema dinamico. In un primo caso lo stato  $\mathbf{Y}$  del sistema è descritto da un numero limitato di coordinate, tipicamente pari al numero di gradi di libertà del sistema. Questo metodo si presta bene ad una modellazione di sistemi semplici, ad esempio catene cinematiche (specie se aperte) dove è piuttosto ovvia la scelta delle coordinate. In alternativa si può descrivere lo stato del sistema  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{Y}}_1, \dots, \dot{\mathbf{Y}}_n\}$  introducendo le numerose coordinate di tutti i corpi liberi  $\mathbf{Y}_i$ , fra le quali si devono imporre le equazioni di vincolo mediante moltiplicatori lagrangiani per il calcolo delle accelerazioni incognite [6].

Dall'analisi della letteratura si osserva che quasi tutti i lavori sul gioco nelle coppie rotoidali hanno adottato la prima strategia. Questo è giustificato dal fatto che la soluzione del problema dinamico in via analitica è relativamente agevole nel caso del quadrilatero con l'aggiunta di una biella di massa nulla, usata per la simulazione della fase di contatto continuo col modello di figura 3. Tuttavia è necessario rilevare che questa soluzione non presenta il carattere di generalità e versatilità che solamente l'impostazione lagrangiana può offrire, quindi si è scelto di utilizzare quest'ultima, con i seguenti vantaggi:

- il metodo è indipendente dal numero di parti e dalla struttura topologica del sistema meccanico (si applica indifferentemente a catene cinematiche aperte o chiuse),
- l'implementazione di vincoli monolateri risulta più agevole [9], e si possono simulare meccanismi con molteplici giochi (ogni gioco corrisponde ad uno o più vincoli monolateri),
- la simulazione di eventi impulsivi (dovuti alla ripresa del contatto in generici vincoli monolateri) comporta una trattazione più semplice.

Il principale svantaggio dell'impostazione lagrangiana consiste nel fatto che si delinea un problema di tipo DAE (differenziale-algebrico, di ordine 3), invece di un semplice ODE (differenziale ordinario). Tuttavia si può far uso del metodo esposto in [10], il quale permette un'agevole integrazione del sistema DAE anche in caso di numerose variabili.

Pertanto, con riferimento al metodo lagrangiano, si prenda in esame un sistema composto da  $N$  corpi rigidi, ognuno dotato di sette gradi di libertà  $\mathbf{q}_i$ , tre per la traslazione e quattro per la rotazione in forma di quaternione unimodulare:  $\mathbf{q}_i = \{\mathbf{q}_{x_i}, \mathbf{q}_{\theta_i}\}$ .

Le equazioni di vincolo (fra le quali compare, ad intermittenza, quella che rappresenta il contatto nel gioco) sono rappresentate dal vettore di equazioni non lineari  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ . Derivando rispetto al tempo:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$[\mathbf{C}_q] \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}_t \quad (2)$$

$$[\mathbf{C}_q] \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_c \quad (3)$$

dove  $[\mathbf{C}_q] = [\partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{q}]$  è la matrice jacobiana delle equazioni di vincolo. Il calcolo di  $[\mathbf{C}_q]$ , di  $\mathbf{C}_t$  e di  $\mathbf{Q}_c$  per un'ampia classe di vincoli è presentato in [7].

Il vettore delle accelerazioni incognite è quindi  $\ddot{\mathbf{q}} = \{\ddot{\mathbf{q}}_1, \dots, \ddot{\mathbf{q}}_n\}$ , incognita del sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{\text{tot}}] & [\mathbf{C}_q]^T \\ [\mathbf{C}_q] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_f + \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (4)$$

con  $\mathbf{Q}_f$  e  $\mathbf{Q}_m$  sollecitazioni attive e giroscopiche, e  $\lambda$  moltiplicatori lagrangiani.

Il vincolo che rappresenta il contatto  $i$ -esimo fra le superfici delle coppie cinematiche con gioco puo' essere rappresentato da una condizione  $C_{ki}(\mathbf{q}, t) = 0$  da aggiungere a tutte le altre già presenti. Pertanto, durante la fase di contatto continuo, la matrice  $[\mathbf{C}_q]$  acquisterà un'ulteriore riga, con la conseguente variazione della dimensione del problema lineare (4). Ad esempio, nel caso in cui siano presenti due contatti fra membri cinematici, il sistema (4) diventa:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{\text{tot}}] & [[\mathbf{C}_q]^T & [\mathbf{C}_{qk1}]^T & [\mathbf{C}_{qk2}]^T] \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_q] \\ [\mathbf{C}_{qk1}] \\ [\mathbf{C}_{qk2}] \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \\ \lambda_{k1} \\ \lambda_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_f + \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{Q}_c \\ \mathbf{Q}_{ck1} \\ \mathbf{Q}_{ck2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ad ogni passo di integrazione si verificano i segni delle forze di contatto nei vincoli  $C_{ki}$ , ed eventualmente si disattivano quelli che presentano forze negative (condizione di distacco) rimuovendoli dal sistema e ripetendo il passo. Si noti che la soluzione qui esposta, con numero di moltiplicatori lagrangiani variabile, passando da fasi di contatto a distacco non richiede che cambi la dimensione del vettore di stato: questo comporta vantaggi dal punto di vista dell'integrazione numerica rispetto a soluzioni che fanno uso di un numero di gradi di libertà variabile per la trattazione di vincoli monolateri.

Al fine di poter introdurre i vincoli del tipo "contatto fra superfici" nel sistema (5), serve una procedura per il calcolo dei termini  $[\mathbf{C}_{qk}]$  e  $\mathbf{Q}_{ck}$ , cosa che sarà esposta nel successivo paragrafo.

### 3 EQUAZIONI DI VINCOLO PER LA FASE DI CONTATTO

Si prenda in esame il caso generale di contatto fra due superfici di curvatura arbitraria, essendo il caso di contatto fra perno e sede circolare un sottocaso di questa più ampia categoria. Tale caso di contatto è stato diffusamente trattato in [8], facendo uso di un formalismo particolare

(metodo *sliding plane*). Si riportano i passaggi salienti. Dati i sistemi di riferimento di figura 4, il contatto fra due superfici curve si può ricondurre al caso di contatto fra punto e piano, avendo imposto accelerazioni e velocità compatibili, sia al punto che al piano, rispetto ai corpi rigidi cui appartengono.

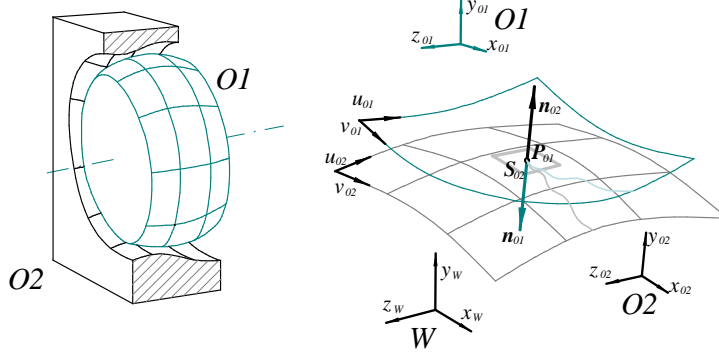


Figura 4: Sistemi di riferimento per la trattazione del contatto col metodo *sliding plane*, nel caso generale (contatto nello spazio fra due superfici di forma arbitraria).

La generica condizione di contatto punto-piano è sviluppata analiticamente in [7], nel caso generico di punto e piano mobili. La formulazione della matrice jacobiana  $[C_{q_k}]$  è la seguente:

$$[C_{q_k}] = \begin{bmatrix} [C_{q_k}]_{xO1} & [C_{q_k}]_{\theta O1} & [C_{q_k}]_{xO2} & [C_{q_k}]_{\theta O2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

dove:

$$\begin{aligned} [C_{q_k}]_{xO1} &= +[1, 0, 0][\Lambda_s]^T[\Lambda_{o2}]^T \\ [C_{q_k}]_{\theta O1} &= -[1, 0, 0][\Lambda_s]^T[\Lambda_{o2}]^T[\Lambda_{o1}][\tilde{\mathbf{q}}_{xP}] [G1_{o1}] \\ [C_{q_k}]_{xO2} &= -[1, 0, 0][\Lambda_s]^T[\Lambda_{o2}]^T \\ [C_{q_k}]_{\theta O2} &= +[1, 0, 0] \left[ [\Lambda_s]^T[\Lambda_{o2}]^T[\Lambda_{o1}][\tilde{\mathbf{q}}_{xP}][G1_{o1}] + [\Lambda_s]^T \left[ [\Lambda_{o2}]^T \tilde{\mathbf{q}}_{xP-S,W} \right] [G1_{o2}] \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Inoltre, il termine  $\mathbf{Q}_{c_k}$  è:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{c_k} = \{ & +[\Lambda_s]^T[\Lambda_{o2}]^T \left( [\Lambda_{o1}][\tilde{\omega}_{o1}][\tilde{\omega}_{o1}]\mathbf{q}_{xP} + 2[\dot{\Lambda}_{o1}]\dot{\mathbf{q}}_{xP} + [\Lambda_{o1}]\ddot{\mathbf{q}}_{xP} \right) + \\ & -[\Lambda_s]^T[\Lambda_{o2}]^T \left( [\Lambda_{o2}][\tilde{\omega}_{o2}][\tilde{\omega}_{o2}]\mathbf{q}_{xS} + 2[\dot{\Lambda}_{o2}]\dot{\mathbf{q}}_{xS} + [\Lambda_{o2}]\ddot{\mathbf{q}}_{xS} \right) + \\ & +2[\dot{\Lambda}_s]^T[\dot{\Lambda}_{o2}]^T\mathbf{q}_{xP-S,W} + 2[\dot{\Lambda}_s]^T[\Lambda_{o2}]^T\dot{\mathbf{q}}_{xP-S,W} + 2[\Lambda_s]^T[\dot{\Lambda}_{o2}]^T\dot{\mathbf{q}}_{xP-S,W} + \\ & +[\Lambda_s]^T \left[ [\Lambda_{o2}][\tilde{\omega}_{o2}][\tilde{\omega}_{o2}]^T\mathbf{q}_{xP-S,W} + [\ddot{\Lambda}_s]^T[\Lambda_{o2}]^T\mathbf{q}_{xP-S,W} \right] \} \end{aligned} \quad (8)$$

avendo fatto uso della seguente notazione:

- $[\Lambda_r] = [\Lambda_r(\mathbf{q}_{\theta_r})]$  matrice di rotazione, funzione del quaternion  $\mathbf{q}_{\theta}$ ,
- $\mathbf{q}_{xO1}$ ,  $\mathbf{q}_{xO2}$ ,  $\mathbf{q}_{\theta O1}$ ,  $\mathbf{q}_{\theta O2}$ , coordinate di traslazione e di rotazione dei corpi rigidi O1 e O2,

- $\mathbf{q}_{x_P}, \mathbf{q}_{x_S}, \mathbf{q}_{\theta_P}, \mathbf{q}_{\theta_S}$  posizione e rotazione dei due sistemi di riferimento  $P_{o1}$  e  $S_{o2}$  rispetto a  $O1$  e  $O2$  (possono essere imposti anche in termini di velocità  $\dot{\mathbf{q}}_{x_S}, \dot{\mathbf{q}}_{x_P}$  ed accelerazioni  $\ddot{\mathbf{q}}_{x_S}, \ddot{\mathbf{q}}_{x_P}$ )
- $[Gl_{o1}]$  matrice rettangolare 3x4, funzione del quaternion  $\mathbf{q}_{\theta_{o1}}$ , tale per cui  $[Gl_{o1}]\dot{\mathbf{q}}_{\theta_{o1}} = \boldsymbol{\omega}_{o1}$ , come in [6],
- $[\tilde{\mathbf{a}}]$  matrice emisimmetrica per la quale  $[\tilde{\mathbf{a}}]\mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$

I termini  $\mathbf{q}_{x_P}, \mathbf{q}_{x_S}, \dot{\mathbf{q}}_{x_S}, \dot{\mathbf{q}}_{x_P}, \ddot{\mathbf{q}}_{x_S}, \ddot{\mathbf{q}}_{x_P}$ , necessari per il calcolo di (6) e (8), possono essere ricavati in funzione dello stato dei due corpi in contatto, sempre come esposto in [8]. Infatti, introducendo la posizione assoluta dei punti di contatto  $\mathbf{P}_{o1}$  e  $\mathbf{S}_{o2}$ , nonché le normali in coordinate assolute  $\mathbf{n}_{o1}$  e  $\mathbf{n}_{o2}$ , sussiste la condizione di contatto fra superfici:

$$\mathbf{C}_{ps} = \mathbf{P}_{o1} - \mathbf{S}_{o2} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{n}_{o1} + \mathbf{n}_{o2} = \mathbf{0} \quad (10)$$

pertanto si può scrivere il sistema lineare che ricava la velocità con la quale si spostano  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{S}$  sulle superfici di contatto, in funzione degli stati dei corpi rigidi  $\mathbf{q}_{o1}, \mathbf{q}_{o2}, \dot{\mathbf{q}}_{o1}$  e  $\dot{\mathbf{q}}_{o2}$ :

$$\begin{bmatrix} [\lambda_{uv}]^T & [0]^T \\ [0]^T & [\lambda_{uv}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_{o1}}{\partial u_{o1}} & \frac{\partial \mathbf{P}_{o1}}{\partial v_{o1}} & -\frac{\partial \mathbf{S}_{o2}}{\partial u_{o2}} & -\frac{\partial \mathbf{S}_{o2}}{\partial v_{o2}} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_{o1}}{\partial u_{o1}} & \frac{\partial \mathbf{n}_{o1}}{\partial v_{o1}} & \frac{\partial \mathbf{n}_{o2}}{\partial u_{o2}} & \frac{\partial \mathbf{n}_{o2}}{\partial v_{o2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{o1} \\ \dot{v}_{o1} \\ \dot{u}_{o2} \\ \dot{v}_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda_{uv}]^T & [0]^T \\ [0]^T & [\lambda_{uv}]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -[\partial \mathbf{P}_{o1} / \partial \mathbf{q}_{o1}] \dot{\mathbf{q}}_{o1} + [\partial \mathbf{S}_{o2} / \partial \mathbf{q}_{o2}] \dot{\mathbf{q}}_{o2} \\ -[\partial \mathbf{n}_{o1} / \partial \mathbf{q}_{o1}] \dot{\mathbf{q}}_{o1} - [\partial \mathbf{n}_{o2} / \partial \mathbf{q}_{o2}] \dot{\mathbf{q}}_{o2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

dove si è introdotta la matrice rettangolare  $[\lambda_{uv}]$  costruita affiancando i due versori di un sistema di coordinate tangente al punto di contatto.

A partire da  $\{\dot{u}_{o1}, \dot{v}_{o1}, \dot{u}_{o2}, \dot{v}_{o2}\}$  è facile calcolare le velocità di  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{S}$  rispetto ai propri corpi rigidi:

$$\dot{\mathbf{P}}_{o1,o1} = \dot{u}_{o1} \frac{\partial \mathbf{P}_{o1,o1}}{\partial u_{o1}} + \dot{v}_{o1} \frac{\partial \mathbf{P}_{o1,o1}}{\partial v_{o1}} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{o2,o2} = \dot{u}_{o2} \frac{\partial \mathbf{S}_{o2,o2}}{\partial u_{o2}} + \dot{v}_{o2} \frac{\partial \mathbf{S}_{o2,o2}}{\partial v_{o2}} \quad (13)$$

Inoltre si possono già calcolare le componenti ortogonali delle accelerazioni lungo le superfici:

$$\ddot{\mathbf{P}}_{o1,o1\perp} = \dot{u}_{o1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{o1,o1}}{\partial u_{o1} \partial u_{o1}} + \dot{v}_{o1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{o1,o1}}{\partial v_{o1} \partial v_{o1}} + 2\dot{u}_{o1}\dot{v}_{o1} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{o1,o1}}{\partial u_{o1} \partial v_{o1}} \quad (14)$$

$$\ddot{\mathbf{S}}_{o2,o2\perp} = \dot{u}_{o2}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{o2,o2}}{\partial u_{o2} \partial u_{o2}} + \dot{v}_{o2}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{o2,o2}}{\partial v_{o2} \partial v_{o2}} + 2\dot{u}_{o2}\dot{v}_{o2} \frac{\partial^2 \mathbf{S}_{o2,o2}}{\partial u_{o2} \partial v_{o2}} \quad (15)$$

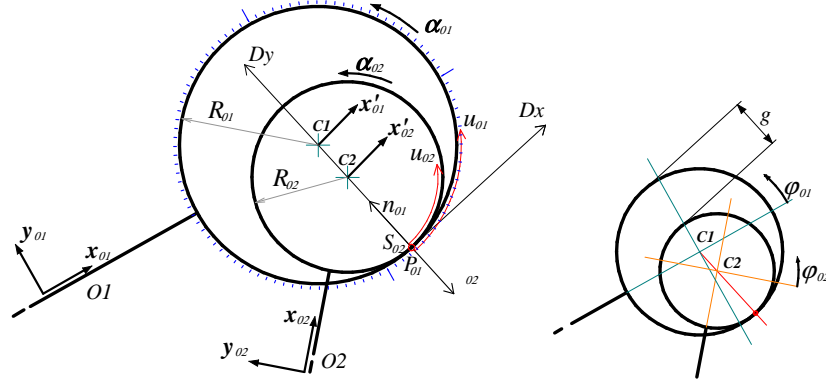


Figura 5: Sistemi di riferimento per la trattazione del contatto col metodo del piano mobile, nel caso semplificato (contatto nel piano tra foro ed albero perfettamente circolari).

da inserire direttamente in (8) assumendo  $\dot{\mathbf{q}}_{x_P} = \dot{\mathbf{P}}_{01,01}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{x_S} = \dot{\mathbf{S}}_{02,02}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{x_P} = \ddot{\mathbf{P}}_{01,01\perp}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{x_S} = \ddot{\mathbf{S}}_{02,02\perp}$ .

Si noti che la soluzione del sistema (11) può essere complicata o impossibile in alcuni casi singolari, descritti sempre nell'articolo [8] al quale rimandiamo per ulteriori chiarimenti.

Va sottolineato che, nel caso di contatto nel piano fra foro ed albero perfettamente circolari, le equazioni si semplificano notevolmente. Infatti, con riferimento alla figura 5, si può far riferimento ai soli gradi di libertà relativi, ovvero  $\mathbf{q} = \{x_{01}, \alpha_{01}, x_{02}, \alpha_{02}\}$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{01} &= \mathbf{D}_x[x_{01} + R_1 \sin(2\pi u_{01} + \alpha_{01})] + \mathbf{D}_y[R_1 - R_1 \cos(2\pi u_{01} + \alpha_{01})] \\ \mathbf{n}_{01} &= \mathbf{D}_x[-\sin(2\pi u_{01} + \alpha_{01})] + \mathbf{D}_y[\cos(2\pi u_{01} + \alpha_{01})] \\ \mathbf{S}_{02} &= \mathbf{D}_x[x_{02} + R_2 \sin(2\pi u_{02} + \alpha_{02})] + \mathbf{D}_y[R_2 - R_2 \cos(2\pi u_{02} + \alpha_{02})] \\ \mathbf{n}_{02} &= \mathbf{D}_x[\sin(2\pi u_{02} + \alpha_{02})] + \mathbf{D}_y[-\cos(2\pi u_{02} + \alpha_{02})] \end{aligned} \quad (16)$$

Nota lo stato dei corpi rigidi, si fa riferimento alle velocità  $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{x}_{01}, \dot{\alpha}_{01}, \dot{x}_{02}, \dot{\alpha}_{02}\}$  ed il sistema (11) diventa un semplice sistema lineare di due incognite:

$$\begin{bmatrix} +R_1 2\pi & -R_2 2\pi \\ -2\pi & +2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{01} \\ \dot{u}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \dot{\alpha}_{01} - \dot{x}_{01} + R_2 \dot{\alpha}_{02} + \dot{x}_{02} \\ \dot{\alpha}_{01} - \dot{\alpha}_{02} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Tale sistema fornisce le incognite  $\dot{u}_{01}, \dot{u}_{02}$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{01} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{x}_{02} - \dot{x}_{01}}{R_1 - R_2} - \frac{\dot{\alpha}_{01}}{2\pi} \\ \dot{u}_{02} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{x}_{02} - \dot{x}_{01}}{R_1 - R_2} - \frac{\dot{\alpha}_{02}}{2\pi} \end{aligned} \quad (18)$$

Facendo uso delle equazioni (14) si possono quindi ottenere le componenti centripete delle accelerazioni di P ed S. Dopo alcune semplificazioni:

$$\ddot{\mathbf{P}}_{01,01\perp} = \mathbf{D}_y \cdot R_1 \left( \frac{(\dot{x}_{02} - \dot{x}_{01})^2}{(R_1 - R_2)^2} + \dot{\alpha}_{01}^2 - \dot{\alpha}_{01} \frac{(\dot{x}_{02} - \dot{x}_{01})}{(R_1 - R_2)} \right) \quad (19)$$

$$\ddot{\mathbf{S}}_{02,02\perp} = \mathbf{D}_y \cdot R_2 \left( \frac{(\dot{x}_{02} - \dot{x}_{01})^2}{(R_1 - R_2)^2} + \dot{\alpha}_{02}^2 - \dot{\alpha}_{02} \frac{(\dot{x}_{02} - \dot{x}_{01})}{(R_1 - R_2)} \right) \quad (20)$$

Tali termini possono essere utilizzati per il calcolo di  $[C_q]_k$  e  $\mathbf{Q}_{x_k}$ , come precedentemente esposto.

Si osservi che  $[C_q]_k$  e  $\mathbf{Q}_{x_k}$  non cambiano per casi col medesimo gioco radiale  $e = R_1 - R_2$ . Nel caso limite con  $R_2 = 0$  e  $R_1 = e$ , la velocità relativa nel punto di contatto è  $v_{re} = \dot{x}_{o2} - \dot{x}_{o1} - R_1 \dot{\alpha}_{o1}$ , e le equazioni 19, 20 si semplificano, con il medesimo risultato del modello con biella a massa nulla:

$$\ddot{\mathbf{S}}_{o2,o2\perp} = 0 \quad \ddot{\mathbf{P}}_{o1,o1\perp} = \mathbf{D}_y (v_{re}^2/e) \quad (21)$$

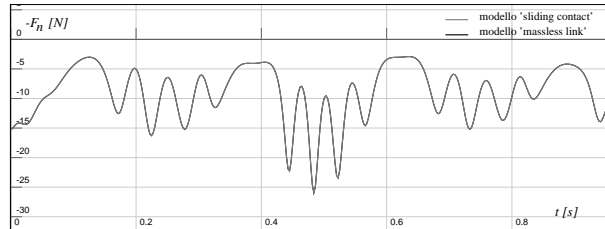


Figura 6: Validazione del nuovo modello di contatto: nel caso di foro e perno circolari, i risultati coincidono esattamente con quelli forniti dal metodo della biella a massa nulla.

#### 4 MODELLO IMPULSIVO PER LA FASE DI URTO

Durante il funzionamento, sia a regime sia in transitorio, può verificarsi il fenomeno del distacco fra le superfici funzionali della coppia con gioco. Tale evento può essere riconosciuto osservando il segno della forza di contatto (che corrisponde, nella presente formulazione, al moltiplicatore lagrangiano  $\lambda_k$ ). Alla fase di distacco corrisponde una fase di volo libero, che si conclude con una collisione (o una sequenza di collisioni) prima di tornare alla condizione di contatto continuo (figura 7).

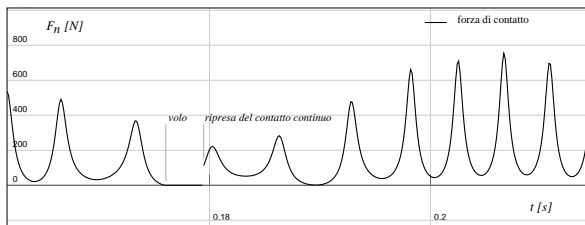


Figura 7: Alternanza delle fasi di contatto, distacco ed impatto.

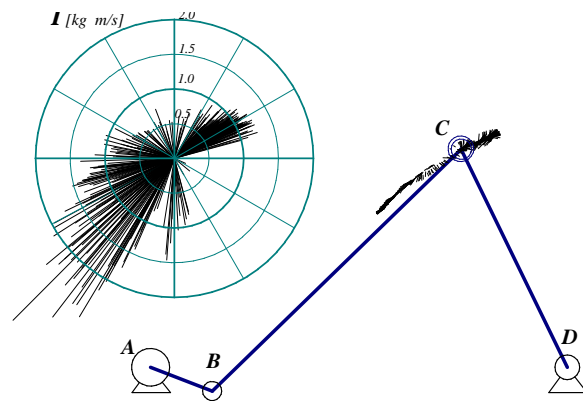


Figura 8: Impulsi prodotti durante un transitorio (10 giri di manovella,  $n = 1000[rpm]$ ).

E' pratica corrente la simulazione dei contatti intermittenti, talvolta particolarmente numerosi, per mezzo di formulazioni impulsive. Tuttavia in letteratura si è rilevato uno scarso approfondimento del fenomeno impulsivo in presenza di attrito, dato che nella maggior parte dei lavori si fa riferimento a semplici impulsi normali alle superfici, attraverso l'introduzione



del coefficiente di restituzione  $e$ . La mancanza di componenti di impulso tangenziali può causare una sovrastima della durata della sequenza di rimbalzi nonché una sottostima degli effetti dissipativi.

Tale limite viene superato dal modello d'urto impulsivo qui proposto, in grado di introdurre impulsi con componenti tangenziali sulla scorta della recente teoria di Chatterjee e Ruina [5].

Siano  $\mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{I}_t$  rispettivamente le componenti normale e tangenziale del singolo impulso  $\mathbf{I}$ , sia  $\mathbf{v}_{i,(c)}$  la velocità pre-collisione nel sistema di riferimento  $(c)$ , avente gli assi Y e Z ortogonali alla normale  $\mathbf{n}$ , e sia  $[\mathbf{M}_{(c)}]$  la matrice di massa locale (rispetto ai tre gradi di traslazione reciproca dei due corpi nel punto di collisione) espressa nel riferimento  $(c)$ . Si possono calcolare i due impulsi  $\mathbf{I}_{a,(c)}$  e  $\mathbf{I}_{b,(c)}$ , rispettivamente impulso per collisione perfettamente plastica senza attrito, ed impulso per collisione completamente dissipativa (che annulli la velocità reciproca sia tangenzialmente che ortogonalmente) esprimendoli nel sistema di riferimento  $(c)$ :

$$\mathbf{I}_{a,(c)} = \left[ \frac{-x_{i,(c)x}}{([\mathbf{M}_{(c)}]^{-1})_{1,1}}, 0, 0 \right]^T \quad (22)$$

$$\mathbf{I}_{b,(c)} = -[\mathbf{M}_{(c)}]\mathbf{v}_{i,(c)} \quad (23)$$

Secondo il modello d'urto adottato, l'impulso effettivo  $\mathbf{I}_{(c)}$  si calcola in funzione di due coefficienti di restituzione  $e_n$  e  $e_t$  (normale e tangenziale) e del coefficiente d'attrito  $\mu$ .

Si calcoli innanzitutto  $\widehat{\mathbf{I}}_{(c)} = (1 + e_n)\mathbf{I}_{a,(c)} + (1 + e_t)\mathbf{I}_{b,(c)}$ .

Qualora si verificasse  $\|\widehat{\mathbf{I}}_{(c)} - (\mathbf{n}_{(c)}^T \widehat{\mathbf{I}}_{(c)})\mathbf{n}_{(c)}\| > \mu \mathbf{n}_{(c)}^T \widehat{\mathbf{I}}_{(c)}$ , si utilizzerebbe

$$k = \frac{\mu(1 + e_n)\mathbf{n}_{(c)}^T \mathbf{I}_{a,(c)}}{\|\mathbf{I}_{b,(c)} - (\mathbf{n}_{(c)}^T \mathbf{I}_{b,(c)})\mathbf{n}_{(c)}\| - \mu \mathbf{n}_{(c)}^T (\mathbf{I}_{b,(c)} - \mathbf{I}_{a,(c)})} \quad (24)$$

altrimenti  $k = (1 + e_t)$ . Si giunge infine all'impulso effettivo  $\mathbf{I}_{(c)}$ :

$$\mathbf{I}_{(c)} = (1 + e_n)\mathbf{I}_{a,(c)} + k(\mathbf{I}_{b,(c)} - \mathbf{I}_{a,(c)}) \quad (25)$$

Al fine dell'applicazione dell'impulso ad un generico sistema vincolato, abbiamo utilizzato il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{\text{tot}}] & [\mathbf{C}_q]^T \\ [\mathbf{C}_q] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

dove  $\mathbf{I}_f$  contiene, in coordinate lagrangiane, tutti gli impulsi  $\mathbf{I}_{(c)_i}$  da applicare. Si noti che la fattorizzazione della (26) è identica alla (4), con evidenti vantaggi in termini di efficienza computazionale.

Inoltre, la (26) può essere usata per il calcolo della matrice  $[\mathbf{M}_{(c)}]$  richiesta dalla (22) e dalla (23), calcolando con tre sistemi (26) gli effetti di tre impulsi ortogonali di valore unitario  $\mathbf{I}_{N,(c)}$ ,  $\mathbf{I}_{U,(c)}$ ,  $\mathbf{I}_{V,(c)}$ , per ottenere  $[\mathbf{M}_{(c)}]^{-1} = [\Delta \mathbf{v}_{N,(c)}, \Delta \mathbf{v}_{U,(c)}, \Delta \mathbf{v}_{V,(c)}]$ .

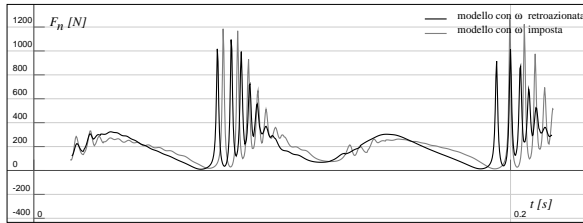


Figura 9: L'ipotesi di velocità imposta con vincolo reonómico produce effetti diversi rispetto al caso con coppia e retroazione PID.

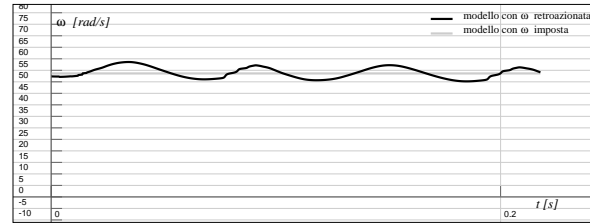


Figura 10: Caso con PID: variazione di velocità angolare. Si notino le irregolarità ed i disturbi ad alta frequenza.

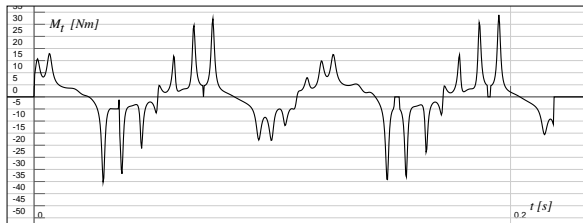


Figura 11: Coppia necessaria al mantenimento della velocità angolare costante (caso con  $n = 500[rpm]$  e raggio manovella  $R = 65[mm]$ ).

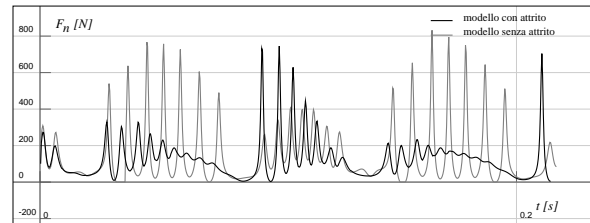


Figura 12: L'attrito limita l'ampiezza delle oscillazioni ad alta frequenza. Inoltre, in questo caso, diminuiscono le interruzioni del contatto.

## 5 RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

Con riferimento ai dati geometrici e di massa di un quadrilatero approntato in laboratorio, si sono svolte numerose simulazioni corrispondenti a diversi casi di gioco (variabile fra  $1mm$  e  $0.1mm$ ) e di velocità angolare della manovella (fino a  $3000rpm$ ). Sulla base dei risultati, si possono elaborare alcune interessanti osservazioni:

- La maggior parte dei modelli in letteratura assume che, nel caso di meccanismi motorizzati, si possa rappresentare il motore come un vincolo reonómico (velocità angolare imposta). Tuttavia, ritenendo che tale ipotesi potesse semplificare eccessivamente il problema (riportandolo al caso inverosimile di volano a massa infinita o controllo a rigidità infinita), si sono svolte simulazioni nelle quali il motore veniva rappresentato da un modello a coppia controllata, completo di PID per la retroazione. In tal modo si rileva una risposta meno periodica e regolare, ma generalmente vi è una limitazione delle oscillazioni nella forza di contatto (figura 9). Inoltre si nota come le oscillazioni e gli urti nella coppia con gioco si riflettano sulla velocità angolare del motore, che presenta disturbi ad alta frequenza (figura 10).
- Sebbene molti ricercatori abbiano svolto simulazioni di meccanismi con gioco evitando l'introduzione del fenomeno d'attrito, si rileva che la presenza, per quanto modesta, di forze d'attrito e di componenti tangenziali negli impulsi, è in definitiva causa non trascurabile di sensibili cambiamenti nell'integrale di moto. A titolo esemplificativo, in figura 12 si riporta l'effetto dell'introduzione di attrito  $\mu = 0.02$ . Inoltre si osserva che la presenza di attrito influisce notevolmente sul numero dei fenomeni di distacco, nonché dei conseguenti urti.

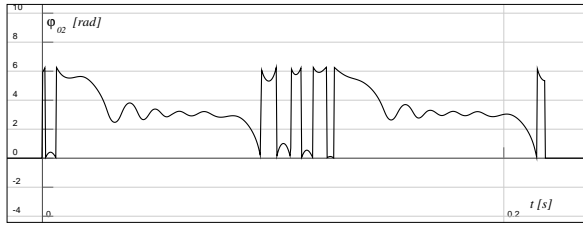


Figura 13: Posizione del punto di contatto, rispetto al perno del bilanciere.

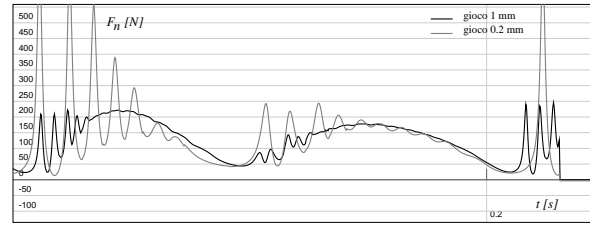


Figura 14: Effetto del gioco sulla dinamica del meccanismo (caso con  $n = 500[rpm]$  e  $R = 85[mm]$ ).

- Il moto relativo delle superfici della coppia rotoidale con gioco tende, a regime, ad un comportamento piuttosto prevedibile. In particolare, nel caso del quadrilatero in esame, si nota come il perno (solidale al bilanciere) tenda ad assumere un comportamento oscillatorio ad alta frequenza attorno a due zone preferenziali del foro, a seconda del fatto che la biella stia spingendo o tirando (figura 13).
- Anche se in presenza di fenomeni fortemente non lineari (attrito, vincoli monolateri, impulsi) è comunque possibile ottenere informazioni di carattere statistico che possano dare informazioni significative ai fini della previsione dell'usura dei materiali. Ad esempio, in figura 15 si riporta la forza normale media scambiata fra le superfici a contatto. Inoltre si può calcolare la densità di probabilità  $p_c$  per il contatto lungo la circonferenza del perno (figura 16), dove la probabilità  $P_c$  di contatto fra  $\phi_1$  e  $\phi_2$  è  $P_c = \int_{\phi_1}^{\phi_2} p_c d\phi$ .

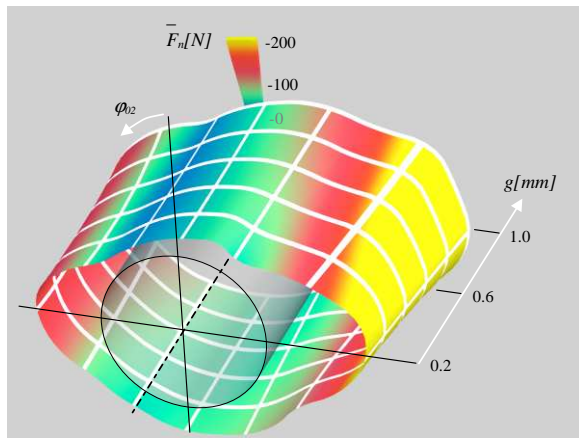


Figura 15: Forza media scambiata nella coppia rotoidale, al variare del gioco.

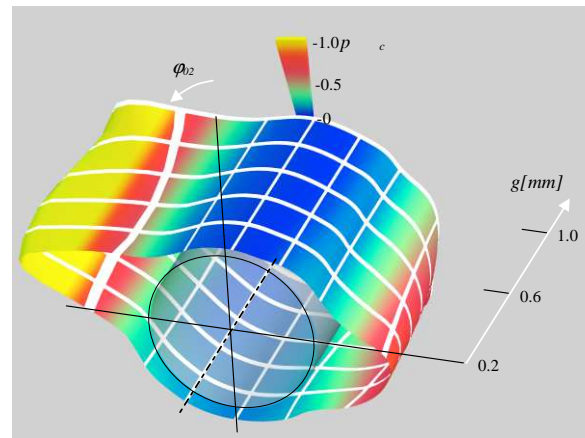


Figura 16: Densità di probabilità di contatto, al variare del gioco.

## 6 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro si è sviluppato un modello innovativo per la simulazione dei giochi nelle coppie cinematiche. La particolare formulazione della metodologia, orientata alla massima generalità, ne permette l'impiego anche nel caso di meccanismi con più giochi contemporanei, eventualmente anche fra superfici di forma arbitraria (fori ovalizzati, usurati, etc.).

In seguito ad eventuali perdite di contatto, il metodo permette di simulare eventi impulsivi dotati di componenti tangenziali alla superficie, dato che i fenomeni d'attrito hanno mostrato un'influenza non trascurabile sul comportamento del meccanismo. In particolare, la rilevanza degli effetti dovuti all'attrito suggerisce un futuro approfondimento del problema in modo da poter considerare modelli di attrito più sofisticati, come nel caso di lubrificazione mediata o nel caso di attrito non uniforme sulle superfici (ad esempio per effetto di usura non omogenea).

Fra l'altro si è osservato come l'assenza di fenomeni dissipativi (attrito) nelle fasi di contatto continuativo e di urto impulsivo tenda ad influire sul numero dei distacchi e dei rimbalzi.

Il perfezionamento del presente metodo di simulazione è funzionale alla ricerca di un criterio per la previsione dell'usura nelle coppie cinematiche con gioco, in vista di un futuro approfondimento della tematica anche in ambito sperimentale.

## 7 RINGRAZIAMENTI

Il presente studio fa parte di un programma di ricerca finanziato con i fondi dell'Università degli Studi di Parma.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S.W.E.Earles, C.L.S.Wu, *Motion analysis of a rigid link mechanism with clearance at a bearing using Lagrangian mechanics and digital computation*, Mechanisms, Institution of Mechanical Engineers, London, 83-89 (1973).
- [2] S.Dubowsky, F.Freudenstein, *Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, Part I: Formation of a dynamic model; Part II: Dynamic response*, Trans.ASME J.Eng.Ind 93B, 305-316 (1971).
- [3] G.Colombo, E.Prati, T.Tripolini, *Modelling and simulation of clearance in the revolute joints of linkages*, III AIMETA International Tribology Conference (AITC 2002), Vietri sul Mare, Salerno, Italy, 18-20 September 2002, Abstract pag.51.
- [4] H.M.Lankarani and M.Pereira, *Treatment of impact with friction in multibody mechanical systems*. EUROMECH 404, Lisboa, 1999.
- [5] A.Chatterjee, A.Ruina, *A new algebraic rigid body collision law based on impulse space considerations*, Journal of Applied Mechanics 65:939951, 1998.
- [6] A.Shabana, *Multibody Systems*, Ed. John Wiley and Sons, New York 1989.
- [7] A.Tasora and P.Righettini, *Application of quaternion algebra to the efficient computation of jacobians for holonomic-rheonomic constraints*. EUROMECH 404, Lisboa, 1999.
- [8] A.Tasora, P.Righettini, *Sliding contact between freeform surfaces*, EUROMECH 427, September 24 - 27, 2001 cole Normale Suprieure, Cachan - France
- [9] F.Pfeiffer and C.Glocker, *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, Ed. John Wiley, 1996.
- [10] A.Tasora, *An optimized lagrangian multiplier approach for interactive multibody simulation in kinematic and dynamical digital prototyping*, VII ISCSB, Ed. CLUP, Milano, 2001.