UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Esercitazioni di MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Corso di Laurea in Ing. Meccanica

Esercitazione n° 5 Anno Accademico 2007/2009

FRENO A CEPPI

Consideriamo una coppia rotoidale costituita da un membro A (ceppo) premuto contro una puleggia B (v. fig.1).
Applicando l'ipotesi di Reye e supponendo che solo il ceppo A sia soggetto all'usura, si può determinare la legge di ripartizione della pressione mutua di contatto tra ceppo e puleggia.
Si ottiene:

$$p = p_0 \cos\vartheta$$

Sia α l'angolo su cui si estende il contatto tra il ceppo e la puleggia; diciamo *s* la bisettrice di tale angolo, *n* la normale alla retta *s*, β l'angolo che la retta *n* forma con la retta OC (e che la retta *s* forma con la direzione d'accostamento *a*, normale ad OC).
Misurando gli angoli ε a partire dalla retta *s*, si vede che è: $\vartheta = \varepsilon - \beta$ (v. fig.2). Si può pertanto scrivere: $p = p_0 \cos(\varepsilon - \beta)$.

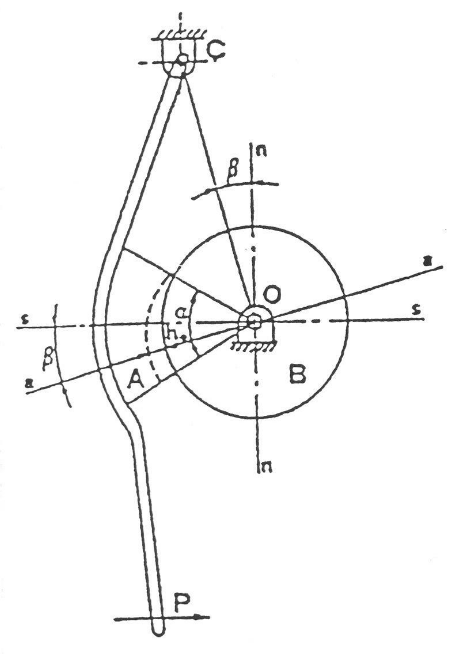

Figura 1

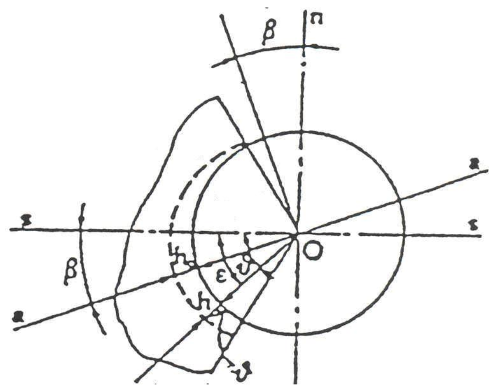

Figura 2

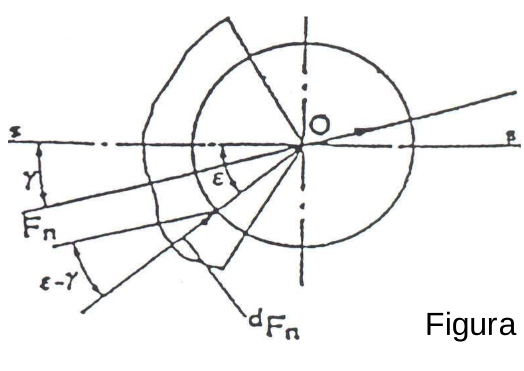

Figura 3

Su ogni arco $d\varepsilon$, la p dà luogo ad una forza radiale $dF_n = bpRd\varepsilon$, (v. fig.3); sia γ l'angolo che la risultante F_n delle dF_n forma con la s; la risultante delle componenti delle dF_n nella direzione ortogonale a quella di F_n è evidentemente nulla, cioè è:

$$bp_0R\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} cos(\varepsilon-\beta)sin(\varepsilon-\gamma)d\varepsilon = 0$$

da cui si può ricavare:

$$tg\gamma = tg\beta\frac{\alpha - sin\,\alpha}{\alpha + sin\,\alpha} \tag{1}$$

La (1) permette di ricavare l'angolo γ, cioè la direzione della F_n quando siano noti gli angoli α (cioè l'estensione del contatto tra il ceppo e la puleggia) e β (cioè la direzione d'accostamento).
Prendendo invece le componenti delle dF_n nella direzione di F_n, si ottiene:

$$F_n = bp_0R\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} cos(\varepsilon-\beta)cos(\varepsilon-\gamma)d\varepsilon = \frac{1}{2}bp_0R(\alpha - sin\,\alpha)\frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma} \tag{2}$$

La (2) permette di calcolare F_n qualora siano noti p_0, R, b, α, β; γ si calcola con la (1).
Ad ogni forza radiale dF_n corrisponde per effetto dell'attrito, una forza tangenziale dF_t data da: $dF_t = f \cdot dF_n$.
Il modulo della risultante F_t delle forze dF_t vale naturalmente:

$$F_t = f \cdot F_n \tag{3}$$

mentre la direzione di F_t è perpendicolare a quella di F_n.
Il momento risultante M_f delle forze dF_t, calcolato rispetto ad O, vale:

$$M_f = fbp_0R^2\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} cos(\varepsilon-\beta)d\varepsilon = 2fbp_0R^2 cos\,\beta\, sin(\alpha/2) \tag{4}$$

Il momento risultante M_f dei singoli momenti elementari dM_f (con $dM_f = fbp_0R^2 cos(\varepsilon-\beta)d\varepsilon$) è uguale al momento della forza risultante F_t; perciò se indichiamo con d la distanza della retta d'azione della F_t dal punto O, si può scrivere:

$$F_t d = 2fbp_0R^2 cos\,\beta\, sin(\alpha/2)$$

da cui, tenendo conto della (3), si trae:

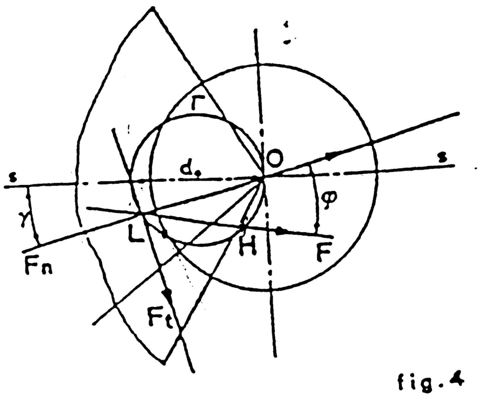

fig.4

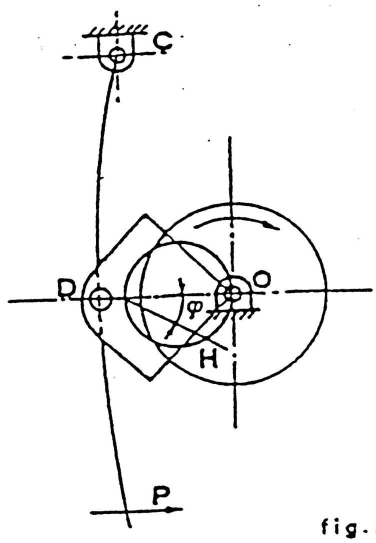

fig.6

$$d = \frac{4\sin(\alpha/2)}{\alpha + \sin\alpha} R\cos\gamma$$

Tracciamo una circonferenza Γ passante per O (v. fig.4) avente il centro sulla bisettrice s dell'angolo α e di diamentro d_0, con:

$$d_0 = \frac{4\sin(\alpha/2)}{\alpha + \sin\alpha} R$$

Su una retta uscente da O e formante con la retta s un angolo γ, detta circonferenza intercetta una corda di lunghezza: $d = d_0 \cos\gamma$, cioè uguale al braccio della forza F_t rispetto ad O. Le rette d'azione della F_t e della F_n si intersecano pertanto in un punto della circonferenza Γ, e precisamente nel punto L, seconda intersezione fra Γ e la sopracitata retta uscente da O e formante con s l'angolo γ. Se diciamo H l'altro punto (oltre ad L) intersezione della retta d'azione di F con la circonferenza Γ, l'arco OH è visto da L sotto un angolo pari a φ; ciò è sempre vero, qualunque sia la direzione d'accostamento.
Se è nota la forza P, imponendo la condizione di equilibrio alla rotazione attorno a C dell'asta portante il ceppo, si determinano F_t e F_n; p_0 si può poi calcolare mediante la (2). Se è noto M_f, si calcolano dapprima F_t e F_n (e, se interessa, p_0), quindi la forza P, necessaria per avere il momento desiderato, si determina imponendo la condizione di equilibrio dell'asta alla rotazione attorno a C.

Supponiamo ora che il ceppo sia flottante, cioè che sia incernierato in D all'asta che lo porta e che è a sua volta accoppiata rotoidalmente al telaio attraverso la cerniera C. In questo caso non è assegnata la direzione di accostamento, cioè non possiamo più dire che il ceppo, logorandosi, si accosta alla puleggia con una traslazione perpendicolare alla OC; il ceppo infatti, durante l'accostamento, può ruotare liberamente attorno a D. Essendo però assegnati i valori di R, α e φ, possiamo tracciare la circonferenza Γ, di diametro d_0 e determinare il punto H prendendo da

un punto qualsiasi di Γ un angolo pari a φ, e tenendo opportunamente conto del verso di rotazione della puleggia (v. fig.5).
Per il punto H così determinato deve ancora necessariamente passare la retta d'azione della forza F.

Vediamo ora come si possa determinare il valore della forza F_s da applicare all'estremo della squadretta del freno, rappresentato schematicamente in fig.6, per ottenere sul tamburo un determinato momento frenante M_f. Si ritengono assegnate tutte le dimensioni del freno ed è noto il coefficiente d'attrito f nel contatto fra i ceppi ed il tamburo.

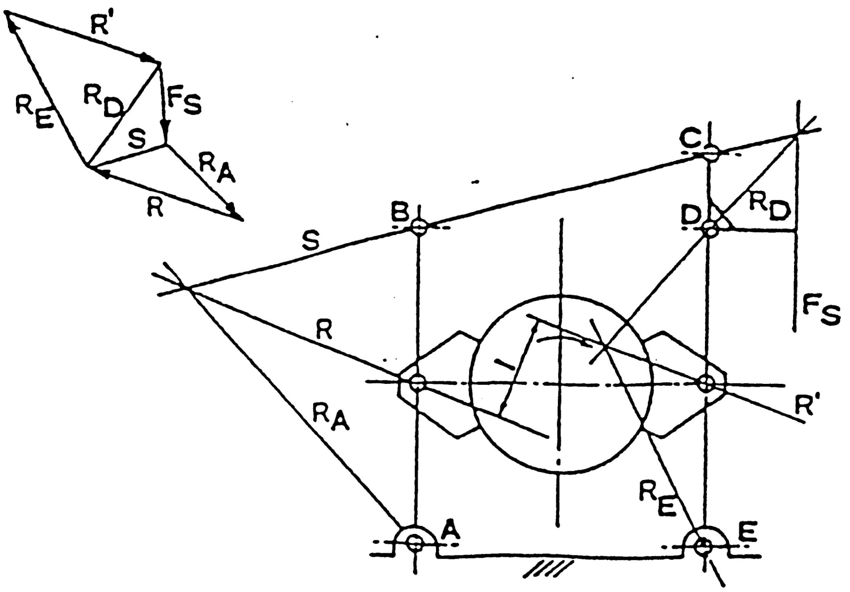

fig.6

Per risolvere il problema, incominciamo a studiare il contatto tra un ceppo e il tamburo. Trattandosi di ceppi flottanti, possiamo applicare quanto già detto. Calcoliamo il diametro d_0 della circonferenza Γ, esprimendo l'angolo in radianti; tracciamo quindi la circonferenza Γ, passante per l'asse del tamburo e col centro sulla bisettrice dell'angolo di contatto fra il ceppo ed il tamburo.

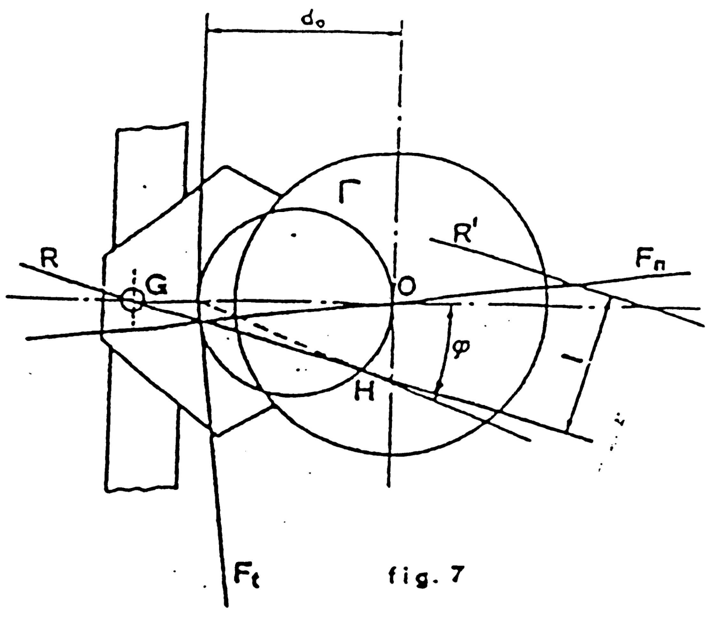

fig. 7

Prendiamo su Γ un angolo pari a $\varphi=arctg(f)$, per esempio tracciando la retta che forma l'angolo φ con la bisettrice dell'angolo di contatto, dalla parte che risulta determinata tenendo opportunamente conto del verso di rotazione del tamburo.
Determiniamo così il punto H, per il quale sappiamo che deve necessariamente passare la risultante R delle forze che si trasmettono ceppo e tamburo (v. fig.7).
Per l'equilibrio del ceppo la retta d'azione della R non può che essere la retta passante per il punto H e per il centro della cerniera. Procedendo in maniera analoga per l'altro ceppo, si determina la linea d'azione della forza R' che tale ceppo trasmette al tamburo. Si può dimostrare che se il freno è simmetrico e le tre cerniere di ciascuna delle due aste laterali sono allineate, le due R e R' sono uguali e contrarie, cioè costituiscono una coppia pura. Si dice perciò che il freno è equilibrato (v. fig.6). Possiamo ora calcolare il modulo della forza R: basta dividere il valore del momento frenante M_f da realizzare per il braccio l della coppia R, R':

$$R = R' = \frac{M_f}{l}$$

Per determinare il valore della forza F_S che permette di avere il valore così calcolato di R, e quindi il valore desiderato di M_f, studiamo l'equilibrio dei singoli membri del meccanismo. Le due forze trasmesse all'asta BC dalle cerniere B e C devono avere la stessa retta d'azione, che è la retta congiungente le due cerniere B e C. Consideriamo ora la squadretta DC; su di essa agiscono:
a) la forza F_S, della quale è nota la retta d'azione;
b) la forza S, trasmessa dall'asta BC, della quale è nota la retta d'azione;
c) la forza R_D trasmessa dall'asta DE attraverso la cerniera D.
La retta d'azione della R_D passa per D e, per l'equilibrio delle sole tre forze S, F_S, R_D agenti sulla squadretta, deve passare anche per il punto d'incontro delle rette d'azione delle forze S e F_S.
Consideriamo ora l'asta AB. Su di essa agiscono:
a) la forza R, completamente determinata;
b) la forza S, della quale è nota la retta d'azione;
c) la forza R_A, trasmessa dal telaio attraverso la cerniera A.
La retta d'azione della R_A passa per A e, per l'equilibrio, deve anche passare per il punto d'incontro delle rette d'azione della R e della S.
Per risolvere il problema, basta dapprima trovare le equilibranti della R nelle direzioni di R_A e di S, determinando così completamente le forze R_A ed S e poi trovare le equilibranti della S nelle direzioni di R_D e di F_S, determinando così completamente la R_D e la F_S (v. fig.6).
Se si inverte il senso di rotazione del tamburo, cambiano le direzioni delle forze R e R'. Il freno si può studiare in modo del tutto analogo a quello visto sopra; la forza F necessaria per ottenere lo stesso momento frenante M_f risulta però in generale diversa.

APPENDICE ï FRENO A CEPPI FLOTTANTI A NORMA DIN 15435

(DA CATALOGO OSTELECTRIC s.a.s.)