UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA –FACOLTA' DI INGEGNERIA

Esercitazioni di MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Anno Accademico 2011/2012

Esercitazione:

INTEGRAZIONE NUMERICA

(DA RIPORTARE SUL QUADERNO)

Cenni teorici

La soluzione analitica dell'integrale di moto di sistemi vibranti lineari ad un grado di libertà è nota e calcolabile in termini esatti. Tuttavia in alcune circostanze potrebbe essere conveniente ricorrere a metodi numerici iterativi per la soluzione approssimata dell'integrale di moto, soprattutto qualora il sistema presenti non-linearità (molle con rigidezza non costante, smorzamento variabile con la velocità, forzanti non sinusoidali, etc.) che complicherebbero eccessivamente la ricerca di una soluzione analitica.

I metodi di integrazione numerica per sistemi dinamici assumono che per un certo stato $\mathbf{s}$ del sistema, ad un certo istante t, sia possibile ottenere la derivata del sistema $d\mathbf{s}/dt$ per mezzo di una funzione che, chiamata più volte in successione dal metodo di integrazione, permetta di calcolare l'evoluzione dello stato nel tempo ad intervalli discreti.

Con riferimento ad un sistema molla-smorzatore ad un grado di libertà, si ha il seguente stato:

$$\mathbf{s} = \{x, v\} \qquad \text{(posizione, velocità)} \tag{1}$$

La derivata dello stato è

$$d\mathbf{s}/dt = \{dx/dt,\ dv/dt\} \tag{2}$$

$$= \{v,\ a\} \tag{3}$$

Si noti che per il calcolo della derivata dello stato è necessaria solamente la valutazione della seconda componente del vettore, in altre parole dell'accelerazione (essendo v già nota in quell'istante).

In generale, dato uno stato $\mathbf{s}$ ad un certo istante t, sarà sempre possibile ricavare $d\mathbf{s}/dt$ con una funzione del tipo

$$d\mathbf{s}/dt = f(\mathbf{s},t) \tag{4}$$

Ad esempio, nel caso del sistema molla-smorzatore qui in esame, essendo $Ma+Rv+Kx=F(t)$, tale funzione sarà:

$$d\mathbf{s}/dt = \{v,\ a\} = \{ v,\quad (F(t)-Rv-Kx)/M \} \tag{5}$$

Se lo smorzamento o la rigidezza non fossero costanti, sarebbe comunque possibile calcolare il secondo elemento del vettore (l'accelerazione) in funzione dello stato $\mathbf{s}$ e del tempo t.

Al fine di calcolare l'integrale di moto $x=\int v\ dt$, si può usare il più semplice dei metodi di integrazione numerica: il metodo di Eulero.

Approssimando la $d\mathbf{s}/dt=f(\mathbf{s},t)$ con differenze finite:

$$\Delta\mathbf{s}/\Delta t = f(\mathbf{s},t) + \varepsilon \tag{6}$$

$$(\mathbf{s}_{t+\Delta t} - \mathbf{s}_t)/\ \Delta t = f(\mathbf{s},t) + \varepsilon \tag{7}$$

quindi, noto uno stato $\mathbf{s}_t$ ad un istante t, si ottiene lo stato $\mathbf{s}_{t+\Delta t}$ all'istante di tempo successivo grazie all'approssimazione:

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} \approx \mathbf{s}_t + \Delta t\ f(\mathbf{s},t) \tag{8}$$

Tale formula può essere utilizzata ripetutamente per ottenere numerose approssimazioni dell'integrale dello stato, ad intervalli crescenti di tempo. In definitiva si ha il *metodo di integrazione di Eulero*, metodo esplicito del primo ordine:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{t+\Delta t} &:= \mathbf{s}_t + \Delta t \;\, f(\mathbf{s},t) \\ t &:= t + \Delta t \end{aligned} \qquad (9)$$

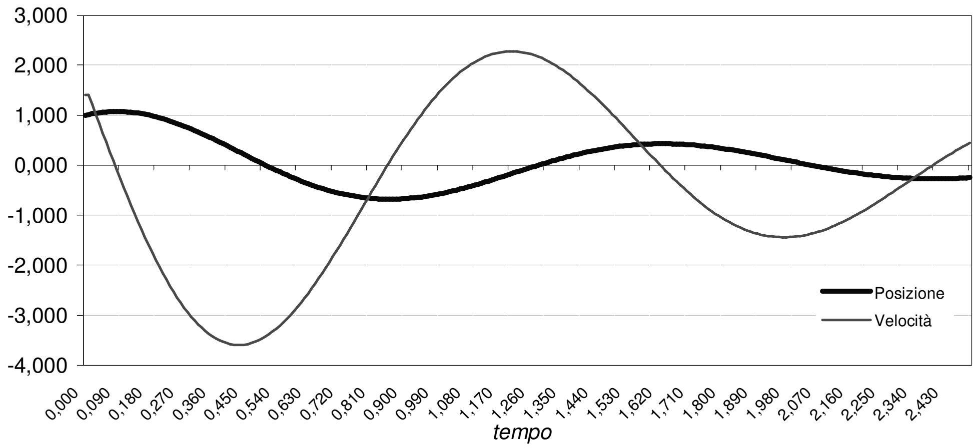
Nel caso specifico del sistema molla-smorzatore, si esegue la seguente iterazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{t+\Delta t} &:= \mathbf{s}_t + \Delta t \;\, \{\, v, \quad (\mathrm{F}(t)\text{-}\mathrm{R}v\text{-}\mathrm{K}x)/\mathrm{M} \,\} \\ t &:= t + \Delta t \end{aligned} \qquad (10)$$

oppure, esplicitando gli elementi del vettore stato:

$$\begin{aligned} v_{t+\Delta t} &:= v_t + \Delta t \;\, [\; (\mathrm{F}(t)\text{-}\mathrm{R}v\text{-}\mathrm{K}x)/\mathrm{M} \;] \\ x_{t+\Delta t} &:= x_t + \Delta t \;\, v_t \\ t &:= t + \Delta t \end{aligned} \qquad (11)$$

Ad ogni istante di tempo i valori di t, x_t e v_t possono essere memorizzati in una lista di valori, in modo da poter tracciare i grafici di $x(t)$ e $v(t)$, come nell'illustrazione che segue:



I primi due valori x_0 e v_0 dai quali parte l'iterazione rappresentano le condizioni al contorno (posizione iniziale e velocità iniziale). L'iterazione termina per $t>t_{\max}$, con $t_{\max}$ fissato dall'utente.

Si osservi che il metodo diverge se si tenta di simulare fenomeni oscillatori ad alta frequenza con passo d'integrazione Δt eccessivamente elevato. Indicativamente, convene assumere Δt non più grande di 1/50 del periodo dell'armonica con frequenza più elevata. Se non si può stimare un valore ottimale di Δt, potrebbe essere necessario ripetere il calcolo, ricordando tuttavia che valori troppo ridotti di Δt comportano lunghi tempi di calcolo.

Metodi d'integrazione di ordine superiore espliciti (Runge-Kutta, Kutta-Merson) o impliciti (Gear, Petzold) permettono precisioni superiori anche con intervalli d'integrazione meno fitti.

Metodo d’integrazione di Eulero con EXCEL™

(Esercizio da riportare sul quaderno)

Si chiede di calcolare l’integrale di moto di un sistema molla-smorzatore con:

Massa	M	=	0,6	kg
Rigidezza	K	=	x	Nm (con x = ultima cifra del numero di matricola + 1)
Smorzam.	R	=	0,9	Ns/m
Pos.iniziale	x_0	=	1,0	m
Vel.iniziale	v_0	=	1,4	m/s

Riportare i grafici con l’andamento della forza scambiata con il telaio, l’andamento della velocità, della posizione e dell’accelerazione, per un periodo di 4 secondi di simulazione.

Traccia di svolgimento

Inserire i valori di massa, rigidezza, smorzamento e step di integrazione in quattro celle diverse, serviranno come costanti in formule successive. Ad esempio:

Massa = cella I3
Rigidezza = cella I4
Smorzamento = cella I5
Intervallo dt = cella I7.

Massa	0,600	[kg]
Rigidezza	1,000	[Nm]
Smorzamento	0,900	[Nm/s]
Intervallo Dt	0,010	[s]

Inserire valori sensati, come in figura.

Si utilizzerà Excel per calcolare automaticamente i valori di posizione, velocità, accelerazione, etc. in forma di dati in colonne distinte.

Si inseriscano, affiancati come in figura, i valori di tempo iniziale t, posizione iniziale x e velocità iniziale dx/dt, ad esempio:

tempo inizio calcolo, t = cella B10
posizione iniziale x = cella C10
velocità iniziale dx/dt = cella D10.

8						
9	t	x	dx/dt	ddx/dtdt		F
10	0,000	1,000	1,400			

Si inserisca anche l’accelerazione iniziale ddx/dtdt (cella D10) come formula: -C10*$I$4-D10*$I$5

Nella riga successiva (riga 11 nel nostro esempio) si inseriranno le formule per il calcolo di t, x, dx/dt, ddx/dtdt e F ad ogni istante di tempo, secondo il metodo d’integrazione di Eulero. In particolare si inseriscano le seguenti formule:

cella B11 =	B10+$I$7	(ovvero $t_{nuovo}= t_{precedente}+ dt$)
cella G11 =	-C11*$I$4-D11*$I$5	(calcola la forza F = -Kx – R dx/dt)
cella E11 =	G10/$I$3	(calcola l’accelerazione a = F/M)
cella D11 =	D10+E10*$I$7	(calcola la velocità $v_{nuova} = v_{precedente} + a\ dt$)
cella C11 =	C10+D10*$I$7	(calcola la posizione $x_{nuova} = x_{precedente} + v\ dt$)

Si osservi che alcuni riferimenti a celle hanno il simbolo $ che precede gli indici: tale simbolo indica che gli indici non devono essere automaticamente incrementati da Excel quando si espande la tabella su più righe.

Per creare una tabella con numerose righe, si selezionino tutte le caselle appartenenti alla 11, ovvero le caselle contenenti le formule appena inserite. Si utilizzi il mouse per trascinare l’angolo in basso a destra del rettangolo di selezione: in tal modo si creeranno altre righe, ognuna con gli indici nelle formule automaticamente aggiornati.

0,000	1,200	1,400	0,000	-7,800
0,010	1,214	1,400	-3,900	-7,842

Se non ci sono problemi, nel foglio così ottenuto si potranno cambiare i valori di x e di dx/dt nella riga 10, ottenendo istantaneamente l'aggiornamento di tutti i valori di posizione, velocità ed accelerazione ad intervalli crescenti di tempo.

I risultati potranno essere raccolti e presentati mediante grafici, come in figura.

Sul sito http://ied.eng.unipr.it/tasora/ è disponibile il seguente materiale didattico, compresso in due archivi **.zip**:

- Esempio di foglio Excel per integrazione col metodo di Eulero: **eulero.xls** . Il foglio elettronico è salvato in modalità 'protetta': non si possono vedere o modificare le formule. Per rimuovere la protezione, utilizzare il menu "Strumenti – Protezione.. – Rimuovi protezione foglio", con password: `mecapp` .

- Programma in linguaggio Matlab **undof_b.m** per la simulazione di sistemi ad un grado di libertà con forzanti generiche e con moto impresso al vincolo. Il programma presenta funzioni più avanzate rispetto al foglio Excel. Per installare ed utilizzare il programma, leggere attentamente il file `help.pdf` nella directory `undof\` .